Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
Ene-Mar 2024
2$^{\text{do}}$ Examen Parcial (35 %)

SOLUCIÓN

Pregunta 1. (5 ptos. c/u) Calcule los siguientes límites:

a)
$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2 - x - 2\right)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\left(\frac{\operatorname{sen}\left((x+1)(x-2)\right)}{x+1}\right)\left(\frac{x-2}{x-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2 - x - 2\right)}{x^2 - x - 2}(x-2)$$

$$= \left(\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2 - x - 2\right)}{x^2 - x - 2}\right)\left(\lim_{x\to -1}(x-2)\right)$$

$$x \to -1 \;\Rightarrow\; u = x^2 - x - 2 \to 0$$

$$\downarrow$$

$$= \left(\underbrace{\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u}}_{=1}\right)\left(\underbrace{\lim_{x\to -1}(x-2)}_{=-3}\right) = -3$$

b)
$$\lim_{x\to 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt[3]{5x^2+7}}$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{5x^2+7}}\right)\left(\frac{9 + 3\sqrt[3]{5x^2+7} + \left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2}{9 + 3\sqrt[3]{5x^2+7} + \left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(4-x^2\right)\left(9 + 3\sqrt[3]{5x^2+7} + \left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2\right)}{27 - \left(5x^2+7\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(4-x^2\right)\left(9 + 3\sqrt[3]{5x^2+7} + \left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2\right)}{5\left(4-x^2\right)}$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 2}\left(9 + 3\sqrt[3]{5x^2+7} + \left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2\right) = \frac{27}{5}$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}} = \lim_{x\to 3^-}\left(\frac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{6x-x^2}}{3+\sqrt{6x-x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)\left(3+\sqrt{6x-x^2}\right)}{9-(6x-x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)\left(3+\sqrt{6x-x^2}\right)}{(x-3)^2}$$

$$= \lim_{x\to 3^-}\frac{3+\sqrt{6x-x^2}}{x-3}$$

$$= \lim_{u\to 0^-}\frac{3+\sqrt{9-u^2}}{u} = -\infty$$

pues $\quad \left(3+\sqrt{9-u^2}\right) \xrightarrow{u\to 0^-} 6 \quad$ y $\quad \left(\dfrac{1}{u}\right) \xrightarrow{u\to 0^-} -\infty$

$$\textbf{d)}\ \lim_{x\to 1}\frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\operatorname{sen}^2(\pi x)} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\left(\operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\left(1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}}_{=\frac{1}{(1)(1+1)}} = \frac{1}{8}$$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|3x+4|-|x|-4}{x}$

Como la expresión varía dependiendo si nos acercamos a cero por la izquierda o por la derecha, determinaremos el límite calculando los límites laterales.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|3x+4|-|x|-4}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x+4-(-x)-4}{x} = \lim_{x\to 0^-} 4 = 4$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|3x+4|-|x|-4}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x+4-(x)-4}{x} = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2$$

Como los límites laterales no coinciden, se tiene entonces que el límite **no existe**.

Pregunta 2. (5 ptos.) Determine el valor de c tal que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{c}\,x^2 - \sqrt{c+c\,x^4}\,\right) x^2 = \frac{3}{\sqrt{c}}$$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{c}\,x^2 - \sqrt{c+c\,x^4}\,\right) x^2 = \sqrt{c}\,\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - \sqrt{1+x^4}\,\right) x^2$$

$$= \sqrt{c}\,\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - \sqrt{1+x^4}\,\right) x^2 \left(\frac{x^2+\sqrt{1+x^4}}{x^2+\sqrt{1+x^4}}\right)$$

$$= \sqrt{c}\,\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^4-(1+\,x^4)\right)x^2}{x^2+\sqrt{1+x^4}} = -\sqrt{c}\,\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+\sqrt{1+x^4}}$$

$$= -\sqrt{c}\,\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{x^4}}} = -\sqrt{c}\,\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^4+1}} = -\frac{\sqrt{c}}{2}$$

pues $\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Luego, c debe ser tal que

$$-\frac{\sqrt{c}}{2} = \frac{3}{\sqrt{c}}$$

y esto último no puede ocurrir ya que el lado derecho de la igualdad es mayor que cero mientras que el lado izquierdo de la igualdad es menor o igual a cero. Por lo tanto, **no existe** valor de c para el cual la ecuación dada se cumpla.

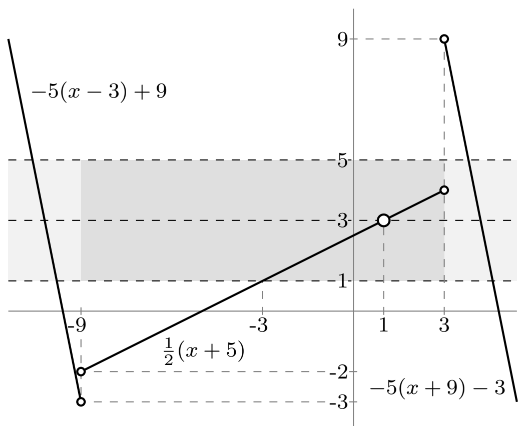
Pregunta 3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -5(x-3)+9 & , \text{ si } x \in (3,\infty) \\ \dfrac{x^2+4x-5}{2(x-1)} & , \text{ si } x \in (-9,1) \cup (1,3) \\ -5(x+9)-3 & , \text{ si } x \in (-\infty,-9) \end{cases}$$

a) (1 pto.) Halle el mayor valor de δ para el cual $\left|f(x)-3\right| < 2$ siempre que $x \in (1, 1+\delta)$

b) (1 pto.) Halle el mayor valor de δ para el cual $\left|f(x)-3\right| < 2$ siempre que $x \in (1-\delta, 1)$

c) (3 ptos.) Dado $\epsilon > 0$, halle $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\left|f(x)-3\right| < \epsilon$ siempre que $0 < |x-1| < \delta$.



Solución: A la derecha se muestra un bosquejo del gráfico de la función f, cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{-9, 1, 3\}$. Notemos que si $x \in (-9,1) \cup (1,3)$ entonces

$$\frac{x^2+4x-5}{2(x-1)} = \frac{(x+5)(x-1)}{2(x-1)} = \frac{1}{2}(x+5)$$

a) Para que el intervalo $(1, 1+\delta)$ esté contenido dentro del dominio de la función f, necesariamente se debe cumplir que $0 < \delta \leq 2$. Luego, como

$$1 < x < 3 \quad \Longrightarrow \quad 1 < 3 < \frac{1}{2}(x+5) < 4 < 5$$

se tiene que **2** es el mayor valor de δ para el cual $f(x) \in (1,5)$ siempre que $x \in (1, 1+\delta)$, pues

$$\left|f(x)-3\right| < 2 \iff -2 < f(x)-3 < 2 \iff 1 < f(x) < 5.$$

b) Por otra parte, para que el intervalo $(1-\delta, 1)$ esté contenido dentro del dominio de la función f, necesariamente se debe cumplir que $0 < \delta \leq 10$. Sin embargo, no todos los valores de $x \in (-9, 1)$ son tales que $f(x) \in (1, 5)$. Para $x \in (-9, 1)$ el gráfico de la función f viene dado por la recta de ecuación $y = \frac{1}{2}(x+5)$, la cual corta la recta $y = 1$ para $x = -3$. Luego, como

$$-3 < x < 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 < \frac{1}{2}(x+5) < 3 < 5$$

se tiene que **4** es el mayor valor de δ para el cual $f(x) \in (1, 5)$ siempre que $x \in (1-\delta, 1)$.

c) Finalmente, para que $\delta > 0$ sea tal que x pertenezca al dominio de la función f para cualquier $x \in (1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta)$, recordando que

$$x \in (1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < |x-1| < \delta,$$

es necesario imponer que $\delta \leq \text{mín}\{10, 2\} = 2$ (10 es la distancia entre -9 y 1 mientras que 2 es la distancia entre 3 y 1). Si $\delta \leq 2$ entonces $x \in (-1, 1) \cup (1, 3)$ y sobre ese conjunto la función f sólo viene expresada por $f(x) = \frac{1}{2}(x+5)$. Luego, como

$$\left| \frac{1}{2}(x+5) - 3 \right| = \frac{1}{2}\,|x-1|$$

se tiene que, dado $\epsilon > 0$,

$$\delta(\epsilon) = \text{mín}\{2\epsilon, D\} \quad \text{con } 0 < D \leq 2$$

para cualquier valor fijo (y arbitrario) $D \in (0, 2]$ es tal que

$$\big|f(x) - 3\big| = \frac{1}{2}\,|x-1| < \frac{1}{2}\,\text{mín}\{2\epsilon, D\} \leq \frac{1}{2}(2\epsilon) = \epsilon$$

siempre que $0 < |x-1| < \text{mín}\{2\epsilon, D\} \leq D \leq 2$.